

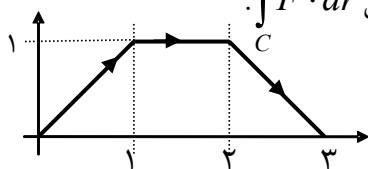
گروه آموزشی : امتحان درس : (-) نیمسال (اول /) - ۱۳ نام مدرس :
 نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : / / وقت : دقیقه

:

- نزدیکترین نقطه از منحنی $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$ به مبدا مختصات را بیابید.

- انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy$ را محاسبه کنید.

- اگر $F = (4x + y, x + 2y)$ مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C F \cdot dr$.
 مسیر C در شکل نشان داده شده است.



- اگر S قسمتی از سطح خارجی استوانه $x^2 + y^2 = 2a^2$ باشد که درون مخروط $x = \sqrt{y^2 + 2z^2}$ قرار دارد، مقدار انتگرال $\iint_S x d\sigma$ را محاسبه کنید.

- حجم محدود به رویه‌های $z = x^2 + y^2$ و $z = 4 - y^2$ را بدست آورید.

- اگر $\vec{k} = (0, 0, 1)$ و $r = x + y + z$ ، مقدار زیر را محاسبه کنید :

$$\text{curl}(\vec{k} \times \text{grad}(\frac{1}{r})) + \text{grad}(\vec{k} \cdot \text{grad}(\frac{1}{r}))$$

- ناحیه $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ را V و سطح آن را S می‌نامیم. درستی قضیه دیورژانس

(واگرایی) را برای تابع برداری $\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x, y, z)$ بررسی کنید.

- فاصله نقطه (x, y, z) از مبدا مختصات برابر است با $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و برای مینیمم شدن این مقدار کافی است تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ مینیمم شود.

روش اول (روش ضرایب لاگرانژ): تابع $g(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + 3z - 4)$ را در نظر می گیریم. در نقطه مورد نظر باید داشته باشیم: $g_x = g_y = g_z = g_\lambda = g_\mu = 0$ یعنی:

$$g_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \quad g_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \quad g_z = 2z - \lambda + 3\mu = 0, \quad x^2 + y^2 - z = 0, \quad x + y + 3z - 4 = 0$$

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

(۵)

$(x - y)(1 + \lambda) = 0$, (۱) اگر $\lambda = -1$ انگاه طبق (۱) یا (۲) داریم $\mu = 0$ و طبق (۳) داریم $z = -\frac{1}{2}$ که با شرط (۴) در

تناقض است پس $\lambda \neq -1$ و باید $x = y$. از معادلات (۴) و (۵) داریم $z = 2x^2$ و $2x + 3z = 4$ یعنی $2x + 3(2x^2) = 4$ و در نتیجه

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} \quad \text{و نقاط} \quad A = (-1, -1, 2) \quad \text{و} \quad B = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right) \quad \text{بدست می آیند.}$$

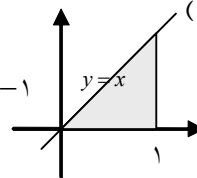
اکنون داریم $f(A) = 6$ و $f(B) = 136/81$ یعنی A دورترین نقطه به مبدا و B نزدیکترین نقطه به مبدا مختصات است.

روش دوم: می توان متغیر z را حذف کرد. $g(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 + \lambda(x + y + 3(x^2 + y^2) - 4)$ را حذف کرد. و با تعداد مجهولات کمتر از روش ضرایب لاگرانژ استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{y} e^{xy} - \frac{2x}{y^2} e^{xy} + \frac{2}{y^3} e^{xy} \right) \Big|_{x=y}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) e^y - \left(y - \frac{2}{y} + \frac{2}{y^3} \right) e^{y^2} \right] dy = \left[\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right) e^y - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right) e^{y^2} \right] \Big|_{y=0}^1 \\ &= \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right) e^y + \frac{1}{y^2} e^{y^2} \right] = \frac{e+1}{2} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{(y-1)e^y + e^{y^2}}{y^2} \right] = \frac{e+1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

- روش اول:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx = \int_0^1 x e^{xy} \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 (x e^{x^2} - x) dx = \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



روش دوم: (تغییر ترتیب انتگرالگیری)

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_1} (4x + y) dx + (x + 2y) dy = \int_0^1 8x dx = 4$$

روش اول: پاره خطها را به ترتیب C_1 , C_2 و C_3 می نامیم.

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_2} (4x + y) dx + (x + 2y) dy = \int_1^2 (4x - 3) dx = 7 \quad \int_{C_3} F \cdot dr = \int_{C_3} (4x + y) dx + (x + 2y) dy = \int_1^2 (4x + 1) dx = 7$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr = 4 + 7 + 7 = 18$$

روش دوم: چون $F = (P, Q) = (4x + y, x + 2y)$ و $P_y = Q_x = 1$ طبق قضیه گرین انتگرال مستقل از مسیر است و می توانیم به جای مسیر C از پاره خط مستقیم C' که نقاط ابتدایی و انتهایی را به هم وصل می کند استفاده کنیم.

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C'} (4x + y) dx + (x + 2y) dy = \int_0^2 4x dx = 18$$

روش سوم: تابع $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2$ وجود دارد بطوریکه $F = \text{grad } f$ یعنی:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \text{grad } f \cdot dr = f(2, 0) - f(0, 0) = 18$$

- سطح را درون صفحه yz تصویر می کنیم. با حذف x در معادلات دو رویه داریم $z^2 + y^2 = a^2$ یعنی تصویر سطح S یک

دایره است که آن را D . بردار نرمال سطح S عبارت است از $(x, y, 0)$ و بردار یکه آن برابر است با $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}a}(x, y, 0)$ و در نتیجه

می نامیم. $\frac{x}{\sqrt{2}a} d\sigma = dydz$. اکنون می توانیم انتگرال را حل کنیم.

$$\iint_S x d\sigma = \iint_D \sqrt{2} a dydz = \sqrt{2} a \iint_D dydz = \sqrt{2} a S_D = \sqrt{2} \pi a^2$$

- تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه xy ، سطح داخلی بیضی $x^2 + y^2 = 4$ است که آن را D می نامیم.

اکنون باید انتگرال $\iiint_V dx dy dz = \iint_D (\frac{4}{3} - x^2 - y^2) dx dy$ را حل کنیم.

$$V = \int_{y=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz dx dy = \int_{y=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4-x^2-y^2) dx dy \quad (\text{حل در دستگاه دکارتی})$$

$$= \int_{y=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8\sqrt{2}}{3} (2-y^2)^{3/2} dy = \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_{y=-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos^3 t dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} \times \frac{4}{3} \pi = \frac{32\sqrt{2}}{9} \pi$$

روش دوم حل انتگرال به کمک تغییر متغیر $x = 2r \cos \theta$ و $y = \sqrt{2} r \sin \theta$ که داریم $dx dy = \sqrt{2} r dr d\theta$

$$V = \iint_D (4-x^2-y^2) dx dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (4-4r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin^2 \theta) \times \sqrt{2} r dr d\theta$$

$$= 8\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r-r^3) dr d\theta = 8\sqrt{2} \times 2\pi \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{32\sqrt{2}}{9} \pi$$

$$\text{grad}(\frac{1}{r}) = \text{grad}(\frac{1}{x+y+z}) = \frac{1}{(x+y+z)^2} (-1, -1, -1)$$

$$\vec{k} \times \text{grad}(\frac{1}{r}) = \frac{1}{(x+y+z)^2} (1, -1, 0) \quad \vec{k} \cdot \text{grad}(\frac{1}{r}) = \frac{-1}{(x+y+z)^2}$$

$$\text{curl}(\vec{k} \times \text{grad}(\frac{1}{r})) = \frac{2}{(x+y+z)^2} (-1, -1, 2) \quad \text{grad}(\vec{k} \cdot \text{grad}(\frac{1}{r})) = \frac{2}{(x+y+z)^2} (1, 1, 1)$$

$$\text{curl}(\vec{k} \times \text{grad}(\frac{1}{r})) + \text{grad}(\vec{k} \cdot \text{grad}(\frac{1}{r})) = \frac{2}{(x+y+z)^2} (0, 0, 3)$$

- سطح ناحیه V ، اجتماع دو سطح مجزای $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $S_2: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است که بردارهای یکه

نرمال آنها به ترتیب عبارتند از $\vec{n}_1 = (-x, -y, -z)$ و $\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x, y, z)$. اکنون داریم $\vec{F} \cdot \vec{n}_1 = -1$ و $\vec{F} \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 d\sigma = \iint_{S_1} (-1) d\sigma + \iint_{S_2} \frac{1}{\sqrt{3}} d\sigma = -4\pi + \frac{1}{\sqrt{3}}(16\pi) = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\iiint_V \text{div} \vec{F} dV = \iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=1}^2 \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \sin \phi d\phi d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi$$

بنابر این $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{F} dV$ یعنی قضیه دیورژانس (واگرایی) برقرار است.